MINISTÈRE DE L'INDUSTRIE ET DE LA RECHERCHE

BUREAU DE RECHERCHES GÉOLOGIQUES ET MINIÈRES

SERVICE GÉOLOGIQUE NATIONAL

B.P. 6009 - 45018 Orléans Cédex - Tél. : (38) 63.00.12

NOTE TECHNIQUE AUX GÉOLOGUES AGRÉÉS EN MATIÈRE D'EAU ET D'HYGIÈNE PUBLIQUE

N° 6

UTILISATION D'ABAQUES POUR LA DÉTERMINATION DE PÉRIMÈTRES DE PROTECTION

par

J.-P. SAUTY et D. THIERY

BRGM

Département géologie de l'aménagement
Hydrogéologie

75 SGN 430 AME

Décembre 1975

RESUME

Ce rapport présente deux abaques et leur mode d'emploi pour une délimitation simple des périmètres de protection.

En effet, ces abaques permettent de déterminer la ligne de partage des eaux enveloppant la zone d'appel (cette ligne contient tous les filets fluides parvenant au puits) et les fronts de déplacement isochrones. Ces fronts constituent une limite au delà de laquelle une particule ne peut parvenir au captage dans un délai inférieur à une durée déterminée ; durée correspondant par exemple à la destruction du polluant par des réactions diverses. Ces abaques sont établis pour les deux hypothèses les plus fréquentes : nappe initialement (avant pompage) en équilibre hydrostatique ou en écoulement uniforme dans un aquifère homogène et isotrope, et soumise à un pompage à débit constant en moyenne.

Ce travail a été réalisé dans le cadre des études générales méthodologiques du département Géologie de l'aménagement.

1. INTRODUCTION

Les périmètres de protection sont des zones délimitées au voisinage des captages, et dans lesquelles un certain nombre d'actions risquant de contaminer l'eau de la nappe sont soumises à des servitudes fixées en application de la réglementation en vigueur, après avis d'un expert, le "géologue agréé", consulté à cette fin.

En effet, lorsqu'un polluant miscible se trouve mêlé à l'eau d'une nappe, il est entraîné par l'écoulement des particules fluides (phénomène de convection). Il convient donc de protéger particulièrement les nappes au voisinage des captages destinés à l'alimentation en eau des collectivités, par la mise en place de ces périmètres.

La mesure la plus sûre consisterait à protéger sur toute leur longueur les lignes de courant qui parviennent au puits : mais on en viendrait ainsi à définir des périmètres de très grande extension, généralement inacceptable du point de vue économique.

Heureusement, différents phénomènes contribuent soit à détruire ou à bloquer le polluant lors de son passage dans l'aquifère, soit à le diluer suffisamment pour abaisser sa teneur au dessous du taux où il risque de créer une nuisance, lorsque la pollution a une cause accidentelle d'assez courte durée (il n'en est pas de même si la pollution est chronique et entretenue en permanence) : ce sont les réactions biologiques et chimiques, ainsi que des mécanismes de fixation et de dispersion. Le temps de parcours dans la nappe nécessaire à la destruction de la pollution ou à sa dilution suffisante variera suivant le polluant envisagé et le type de milieu aquifère. Le géologue agréé en viendra alors à limiter son périmètre de protection à la portion des filets fluides susceptible de parvenir aux captages dans un temps inférieur au délai de destruction du polluant envisagé.

Le présent rapport donne le moyen pratique de déterminer la ligne de partage enveloppant la zone d'appel (elle contient tous les filets fluides parvenant au puits) et les "isochrones" (limite au-delà de laquelle une particule ne peut parvenir au captage dans un délai inférieur à une durée fixée), dans les deux cas les plus fréquemment rencontrés : nappe initialement en équilibre hydrostatique (avant pompage) ou nappe en écoulement uniforme dans un aquifère homogène et isotrope, soumise à un pompage à débit constant en moyenne.

Dans chacun de ces deux cas, un abaque unique sert à délimiter les périmètres pour toutes les valeurs possibles des paramètres. Ce rapport donne un mode d'emploi des deux abaques placés en annexes I et II.

On trouvera en annexe III l'établissement des formules qui ont permis de tracer ces abaques.

N.B. Il se peut qu'une nappe soit en écoulement, mais qu'on ignore tout à ce sujet : sens d'écoulement, pente, transmissivité. On utilise alors la détermination du premier cas (équilibre hydrostatique), mais en ajoutant un facteur de sécurité, car on sous-estimera ainsi les vitesses de transfert vers le puits suivant l'axe de l'écoulement.

2. NAPPE EN EQUILIBRE HYDROSTATIQUE (avant la mise en service du captage)

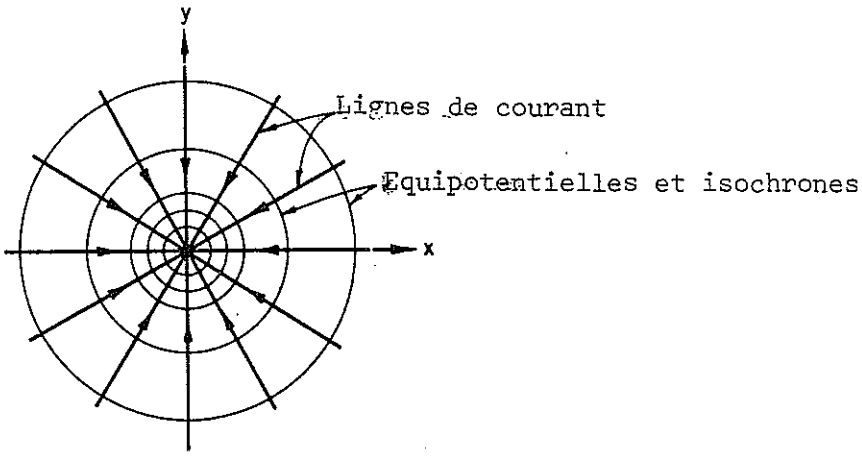


schéma d'écoulement

2.1. Données nécessaires

Q débit constant fictif continu du puits (si l'on doit pomper le débit constant q pendant 10 heures tous les jours, prendre $Q = \frac{q \times 10}{24}$)

e épaisseur de la nappe (au repos) en mètres

m porosité cinématique de l'aquifère*

t temps de séjour nécessaire à la destruction du polluant.

2.2. Périmètre d'appel

Le puits étant le seul exutoire d'une nappe initialement au repos, tous les filets fluides y convergent : l'ensemble de l'aquifère est à l'intérieur du périmètre d'appel.

2.3. Isochrones

Aucune direction n'étant privilégiée, les fronts de déplacement isochrones sont des cercles concentriques.

---

* *C'est le rapport de la vitesse de Darcy à la vitesse moyenne du fluide. Ce nombre est du même ordre de grandeur que le coefficient d'emmagasinement de l'aquifère si la nappe est libre, c'est-à-dire la porosité efficace ou "porosité de drainage" ; il est inférieur à la porosité totale. On peut le déduire des résultats d'une expérience de traçage.*

2.3.1. Détermination par le calcul

Le rayon r du cercle lieu des points dont les particules parviendront au puits après un parcours de durée t, a la valeur suivante :

$$r = \sqrt{\frac{Q\ t}{\pi\ e\ m}}$$

avec
- Q débit en m3/s
- t temps en secondes
- e épaisseur en mètres
- m porosité cinématique
- r rayon en mètres

$$r = 165{,}84\ \sqrt{\frac{Q\ t}{e\ m}}$$

avec
- Q débit en m3/s
- t temps en jours
- e épaisseur en mètres
- m porosité cinématique
- r rayon en mètres

$$r = 2{,}764\ \sqrt{\frac{Q\ t}{e\ m}}$$

avec
- Q débit en m3/h
- t temps en jours
- e épaisseur en mètres
- m porosité cinématique
- r rayon en mètres

2.3.2. Détermination graphique

Dans ce cas particulier, la détermination est plus compliquée à l'aide de l'abaque que par le calcul, mais elle permet de se familiariser avec la méthode graphique nécessaire dans le cas d'une nappe non initialement au repos.

On procède en trois temps :

a) On calcule le nombre adimensionnel* t' :

---

* *t' est un nombre adimensionnel parce que indépendant du système d'unité choisi lorsque celui-ci est cohérent (première formule)*

$$t' = \frac{Q}{m\ e^3}\ t$$

avec
- Q débit en m3/s (ou Q en m3/h)
- t temps en secondes (ou t en heures)
- e épaisseur en mètres
- m porosité cinématique

ou

$$t' = 86400 \cdot \frac{Q\ t}{m\ e^3}$$

avec
- Q débit en m3/s
- t temps en jours
- e épaisseur en mètres
- m porosité cinématique

ou

$$t' = 24 \cdot \frac{Q\ t}{m\ e^3}$$

avec
- Q débit en m3/h
- t temps en jours
- e épaisseur en mètres
- m porosité cinématique

b) On cherche sur l'abaque n° 1 les cercles successifs gradués t'_1 et t'_2 tels que $t'_1 \leq t' < t'_2$, puis on relève par interpolation le rayon r du cercle intermédiaire correspondant au temps t'. L'abaque a été construit de façon à lire r' en centimètres.

c) On calcule le rayon réel du cercle

$$r_{(m)} = r'_{(cm)} \cdot e_{(m)}$$

- e épaisseur de la nappe en mètres
- r' rayon du cercle sur l'abaque, en centimètres
- r rayon du périmètre de protection, en mètres

N.B. En fait, r' est un nombre sans dimension mesuré sur l'abaque en cm car l'abaque a été construite dans une échelle de (cm^{-1})

2.3.3. Exemple d'application

La nappe a une épaisseur de 10 m, la porosité efficace (assimilée à la porosité cinématique) est estimée à 15 %, et le captage doit prélever un débit de 400 m3/h, 12 heures par jour (d'où un débit fictif continu de

200 m3/h). On veut placer le périmètre de protection à 10 jours de temps de parcours au puits :

1) L'application de la formule $r = 2{,}764 \sqrt{\frac{Q\ t}{e\ m}}$ conduit à :

$$r = 2{,}764 \sqrt{\frac{200 \times 10}{10 \times 0{,}15}} = 2{,}764 \sqrt{1333}$$

$$\boxed{r = 101 \text{ m}}$$

2) L'utilisation de l'abaque donne :

a) $t' = 24 \frac{Q\ t}{me^3} = 24 \times \frac{200 \times 10}{0{,}15 \times 10^3} = \frac{48}{0{,}15} = 320$

b) $r' \not\leq 10$ cm

c) $r = r' \times e \not\leq 100$ m

3. NAPPE EN ECOULEMENT INITIAL UNIFORME

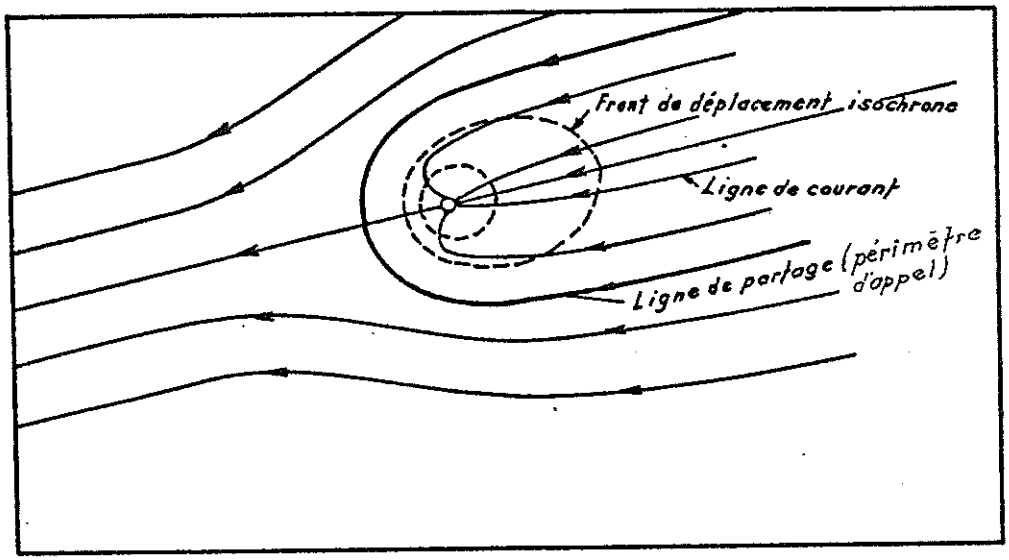


Schéma d'écoulement

Dans ce cas, les courbes caractéristiques : périmètre d'appel et fronts de déplacement sont des courbes plus complexes que dans le cas précédent. On connaît leurs équations qui sont présentées en annexe à ce rapport, mais il est beaucoup plus aisé d'utiliser les abaques que d'en recalculer les points.

3.1. Données nécessaires

- Q débit fictif continu du puits (si l'on doit pomper le débit q pendant 10 heures tous les jours, prendre $Q = q \times \frac{10}{24}$)
- e épaisseur de la nappe (au repos)
- m porosité de l'aquifère
- T transmissivité de l'aquifère
- i pente (uniforme) de l'écoulement naturel de la nappe avant pompage, direction de cet écoulement
- t temps de parcours nécessaire à la destruction du polluant.

3.2. Ligne de partage

La ligne de partage est une courbe ouverte, ayant une certaine similitude avec une parabole dont le foyer serait approximativement localisé à l'emplacement du captage. Son axe de symétrie coïnciderait avec l'axe de l'écoulement et les branches infinies seraient dirigées vers l'amont de la nappe.

Toutefois, ces branches infinies admettent, à distance finie de l'axe, des asymptotes dont l'écartement est tel qu'elles délimitent à l'amont de la nappe une section dans laquelle l'écoulement intercepté est égal au débit capté par le puits.

L'abaque n° II permet de tracer cette courbe.

En pratique, on procède ainsi pour déterminer la ligne de partage :

a) Sur la carte de travail on trace l'axe parallèle à l'écoulement et sa perpendiculaire, qui passent par le puits. On oriente la carte de telle façon que la zone d'alimentation de la nappe (amont) se trouve sur la droite.

b) On reporte sur la carte quelques points de la ligne de partage relevés sur l'abaque, en les repérant par leurs distances aux deux axes, et en utilisant la formule de conversion suivante :

$$d_{(m)} = \frac{Q}{20\ Ti}\ d'_{(cm)}$$

- d' distance en cm mesurée sur l'abaque
- d distance réelle en mètres
- Q débit en m3/s
- T transmissivité en m2/s
- ou bien Q en m3/h, T en m2/h
- i pente naturelle de la nappe, nombre sans dimension

3.3. Isochrones

Ces courbes ont une forme ovale ; elles entourent le puits de pompage, et sont inscrites à l'intérieur de la zone d'appel. Le réseau de courbes est tracé sur l'abaque n° II. On choisit sur cet abaque la courbe correspondant au temps de parcours retenu pour la destruction de la pollution,

puis, après multiplication par un facteur d'échelle, on la reporte sur la carte où est repérée l'implantation du forage.

En pratique, on procède ainsi :

a) On calcule le nombre adimensionnel $t'' = \frac{2\,T^2\,i^2\,t}{m\,e\,Q}$

avec
- Q débit en m3/s
- T transmissivité en m2/s
- t temps en secondes
- e épaisseur en mètres
- m porosité cinématique (sans dimension)
- i pente de la nappe (sans dimension, en m/m par exemple)

ou
- Q en m3/h
- T en m2/h
- t en h

ou bien

$t'' = 172\,800\,\frac{T^2\,i^2\,t}{m\,e\,Q}$ avec
- Q débit en m3/s
- T transmissivité en m2/s
- t temps en jours
- e épaisseur en mètres
- m porosité cinématique (sans dimension)
- i pente de la nappe (sans dimension)

ou bien

$t'' = 48\,\frac{T^2\,i^2\,t}{m\,e\,Q}$ avec
- Q débit en m3/h
- T transmissivité en m2/h
- t temps en jours
- e épaisseur en mètres
- m porosité cinématique (sans dimension)
- i pente de la nappe (sans dimension)

b) On cherche sur l'abaque n° II les courbes successives graduées t''_1 et t''_2 telles que $t''_1 \leqslant t'' < t''_2$, puis on trace par interpolation la courbe correspondant à la date t''. L'abaque a été construit de façon à lire les distances d' en centimètres.

c) Sur la carte de travail on trace l'axe parallèle à l'écoulement et sa perpendiculaire, qui passent par le puits. On oriente la carte de telle façon que la zone d'alimentation de la nappe (amont) se trouve sur la droite.

d) On reporte sur la carte quelques points de la courbe relevés sur l'abaque, en les repérant par leurs distances aux deux axes, et en utilisant la formule de conversion suivante :

$$d_{(m)} = \frac{Q}{20\ Ti}\ d'_{(cm)}$$

- d' distance en cm mesurée sur l'abaque
- d distance réelle en mètres
- Q débit en m3/s
- T transmissivité en m2/s
- ou bien Q en m3/h, T en m2/h
- i pente naturelle de la nappe, nombre sans dimension

Dans la pratique, il suffira de reporter les quatre points d'intersection avec les deux axes du paragraphe précédent et deux ou quatre points supplémentaires ce qui, en tenant compte de la symétrie par rapport à l'axe de l'écoulement, conduit à ne relever que 4 ou 5 points sur l'abaque. Ces quelques points définissant la courbe avec une précision suffisante.

3.4. Exemple d'application

La nappe a une épaisseur de 10 m et la transmissivité est de 300 m2/h ; la porosité efficace est estimée à 15 %. Avant la mise en service des captages, la nappe avait une pente naturelle de 2 ‰, et l'on va y prélever 400 m3/h pendant 12 heures tous les jours (d'où un débit fictif continu de 200 m3/h). On veut placer le périmètre de protection à 10 jours de temps de parcours du puits.

a) On calcule $t'' = 48 \times \frac{T^2\ i^2\ t}{m\ e\ Q} = 48 \times \frac{(300)^2 \times (2 \times 10^{-3})^2\ 10}{0{,}15 \times 10 \times 200} = 0{,}576$

b) On interpole la courbe $t'' = 0{,}576$ entre les courbes $t''_1 = 0{,}5$ et $t''_2 = 0{,}6$

c) On reporte les axes sur la carte de travail

d) On relève les points sur l'abaque :

$x'_A = -3$ cm

$x'_B = 10,6$ cm

$y'_C = -y'_D = 4,5$ cm

pour $x'_E = x'_F = 6$ cm $\qquad y'_E = -y'_F = 5,2$ cm

d'où les distances réelles, en multipliant par le facteur :

$$\frac{Q}{20\ Ti} = \frac{200}{20 \times 300 \times 2 \times 10^{-3}} = 16,67$$

$x_A = 16,67 \times (-3) = -50$ m

$x_B = 16,67 \times 10,6 = 177$ m

$y_C = -y_D = 75$ m

pour $x_E = x_F = 100$ m $\qquad y_E = -y_F = 87$ m

Les points A B C D E F sont alors reportés sur la carte en prenant en compte l'échelle qui lui est propre.

e) La ligne de partage se reporterait de la même façon avec repérage de quelques points.

3.5. Remarques sur l'emploi de cette méthode

3.5.1. Cas des temps adimensionnels faibles

Si $t'' < 0,05$, les fronts sont à peu près circulaires et on peut employer la méthode de la nappe hydrostatique sans commettre une grande erreur.

Exemple : avec les mêmes données que dans l'exemple du paragraphe 3.4., mais avec une pente i plus faible :

$i = 0,4$ ‰

$$t'' = 48\ \frac{(300)^2 \times (4 \times 10^{-4})^2\ 10}{0,15 \times 10 \times 200} = 0,023$$

La consultation de l'abaque donne :

$$x'_A = -1{,}1 \text{ cm} \qquad x'_B = 1{,}3 \text{ cm} \qquad \text{d'où} \quad \begin{cases} x_A = \dfrac{Q}{20\ Ti}\, x'_A = \dfrac{200}{20 \times 300 \times 4 \times 10^{-4}} \times (-1{,}1) = -92 \text{ m} \\ x_B = \dfrac{Q}{20\ Ti}\, x'_B = \dfrac{200}{20 \times 300 \times 4 \times 10^{-4}} \times 1{,}3 = 108 \text{ m} \end{cases}$$

alors que le calcul direct d'un cercle (§ 2.3.1.) donne :

$$r = 2{,}764 \sqrt{\frac{200 \times 10}{10 \times 0{,}15}} = 101 \text{ m}$$

3.5.2. Cas de manque de données

Les données nécessaires au calcul du cas hydrostatique sont en général connues : débit du forage et épaisseur de l'aquifère d'après le forage s'il est complet. Quant à la porosité efficace, elle peut être estimée d'après la nature lithologique des formations rencontrées.

Par contre, le calcul dans le cas d'une nappe en mouvement demande une connaissance plus approfondie des paramètres hydrauliques, particulièrement la transmissivité et la forme de la surface piézométrique avant mise en action du forage qui indique la direction et la pente de l'écoulement naturel.

En l'absence de carte de nappe, on peut, en première approximation, pour bon nombre de nappes libres, considérer qu'elles suivent sensiblement, en la "lissant", la topographie.

Si on est dans le doute complet, on fait un calcul dans l'hypothèse d'une nappe hydrostatique en augmentant les temps de parcours demandés pour se protéger contre le fait que les vitesses de nappe seront sous-estimées le long de l'axe de l'écoulement dont la direction est inconnue.

Remarques :

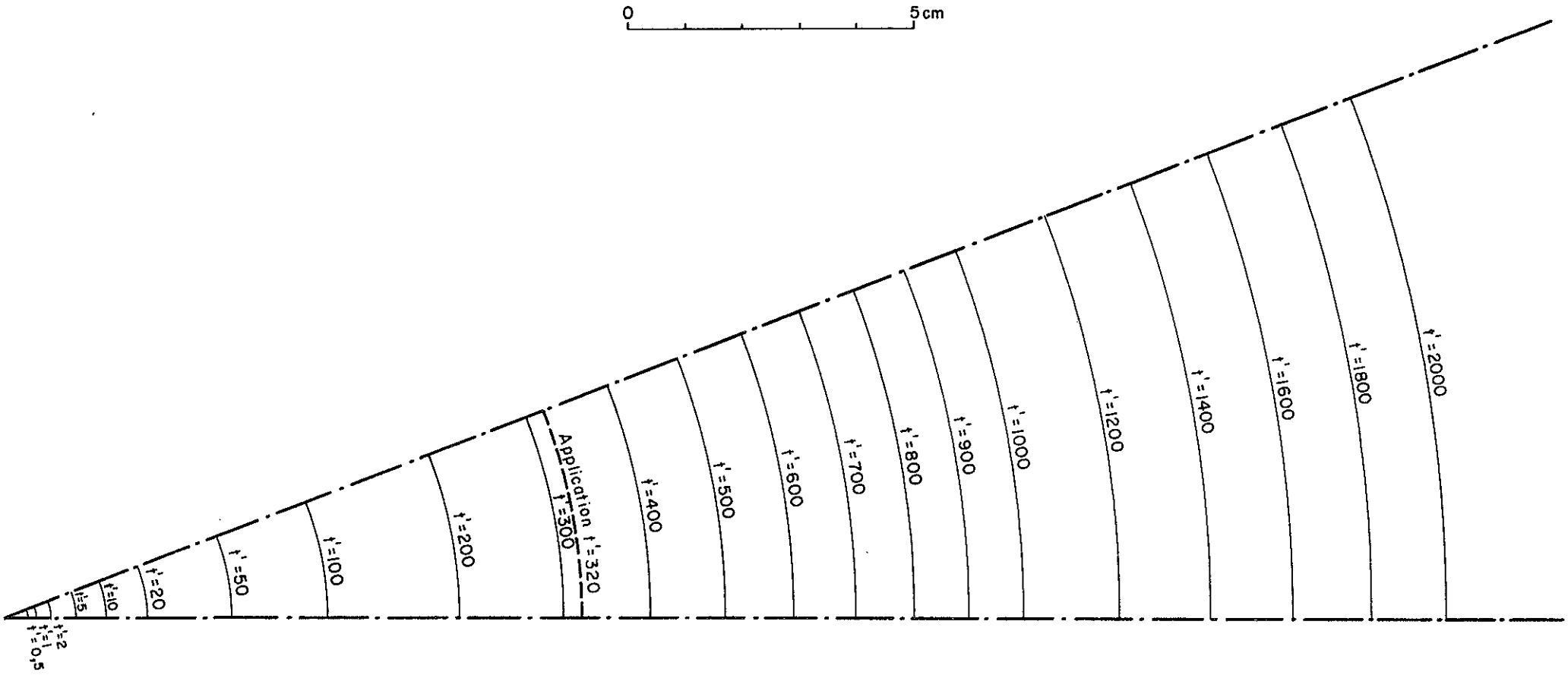
Il convient de ne pas perdre de vue que la valeur pratique des résultats d'application de la méthode générale exposée ici est subordonnée :

1° à la représentativité de la valeur moyenne adoptée pour la "porosité cinématique". Il serait souhaitable de déduire, chaque fois que possible, cette valeur d'expériences de traçage réalisées dans le site même du captage à protéger.

2° du choix de la valeur du "temps de parcours minimal" à adopter. Cette durée ne peut actuellement être déterminée par une méthode rationnelle précise, et on sait qu'elle ne serait pas indépendante de la nature des substances polluantes à considérer ni du processus de leur introduction dans l'aquifère. C'est précisément là un objectif de recherches à développer.

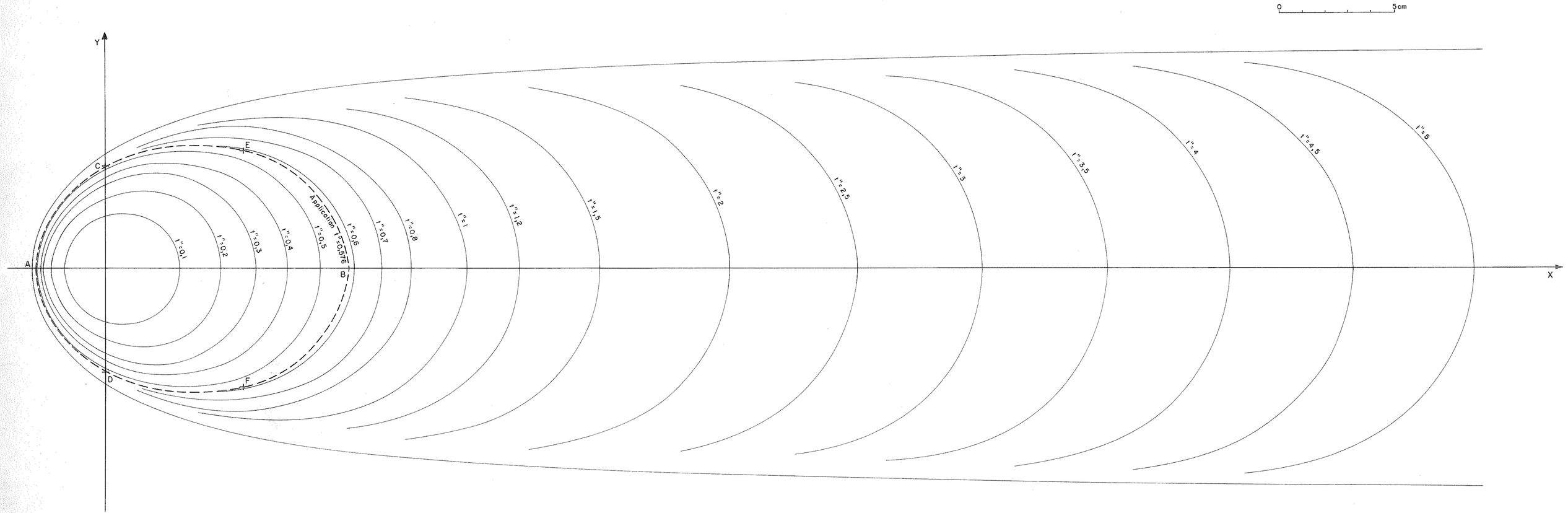
Annexe I

Abaque n°1 – Nappe initialement au repos



Annexe II

Abaque n°2 — Nappe initialement en écoulement uniforme



DEVELOPPEMENTS MATHEMATIQUES AYANT CONDUIT A LA CONSTRUCTION DES ABAQUES

J. BEAR et M. JACOBS ont résolu analytiquement le problème du déplacement de l'eau injectée à débit constant par un puits unique dans un milieu aquifère homogène, isotrope, d'extension infinie et soumis à un écoulement naturel uniforme.

Leur solution, exprimée en nombres adimensionnels, montre qu'il suffit d'un abaque unique présentant le réseau des courbes isochrones ainsi que leur enveloppe.

Il est aisé d'adapter leur démonstration au cas inverse d'un prélèvement à débit constant. C'est ce qui est développé dans la présente note où l'on trouvera une transposition des calculs que J. BEAR et M. JACOBS ont publié en 1965 dans Journal of Hydrology, n° 1 - 3, pp. 37-57, puis que J. BEAR a repris en 1972 dans son traité : Dynamics of fluids in porous media, pp. 532 et 534.

1. NAPPE EN MOUVEMENT

Soit une nappe d'épaisseur e, avec transmissivité moyenne T, pente moyenne i et porosité cinématique m ; on se propose de déterminer le temps t que mettra une particule fluide de coordonnées x et y pour atteindre un puits de pompage de débit Q situé à l'origine des coordonnées.

On utilise la théorie des potentiels complexes : le potentiel est la somme du potentiel correspondant à une nappe de pente moyenne i et de celui correspondant à un puits de pompage de débit Q.

- Ecoulement uniforme d'axe ox, de droite à gauche

Le potentiel complexe $W_1(z) = \phi_1 + j\,\psi_1$ est déterminé par la formule :

$W_1(z) = i\,z + Z_1$

Z_1 = constante arbitraire
i = pente de la nappe
j = nombre imaginaire pur ($j^2 = -1$)

- Puits de débit Q placé à l'origine

$$W_2(z) = \phi_2 + j\,\psi_2 = \frac{Q}{2\pi T}\,\mathrm{Log}\,\frac{z}{Zo}$$

Zo étant une constante de référence.

- Potentiel résultant

$$W(z) = \phi + j\,\psi = iz + \frac{Q}{2\pi T}\,\mathrm{Log}\,\frac{z}{Zo} + Z_1$$

ce qui peut s'écrire en choisissant correctement les constantes Z_o et Z_1 :

$$W(z) = i\,z + \frac{Q}{2\pi T}\,\mathrm{Log}\,z \qquad (1)$$

On en déduit immédiatement

$$\phi(x,y) = i\,x + \frac{Q}{4\pi T}\,\mathrm{Log}\,(x^2 + y^2) \qquad (2)$$

$$\psi(x,y) = i\,y + \frac{Q}{2\pi T}\,x\,\mathrm{Arctg}\,\frac{y}{x} \qquad (3)$$

L'expression de la vitesse est

$$\vec{V} = -\frac{T}{e\,m}\,\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,\phi$$

sa composante suivant l'axe des y est donc :

$$v_y = \frac{d\,y}{d\,t} = -\frac{T}{e\,m} \times \frac{Q}{2\pi T}\,\frac{y}{x^2 + y^2}$$

en fonction de x(t) et y(t), coordonnées de la particule en mouvement.

Pour la commodité des calculs, on définit les notations adimensionnelles suivantes :

$$t' = \frac{t}{\frac{m\,e\,Q}{2i^2T^2}} \qquad x' = \frac{x}{\frac{Q}{2iT}} \qquad y' = \frac{y}{\frac{Q}{2iT}} \qquad \psi' = \frac{\psi}{\frac{Q}{2T}}$$

On obtient alors

$$\frac{dy'}{dt'} = -\frac{1}{\pi}\,\frac{y'}{x'^2 + y'^2}$$

d'où on déduit

$$dt' = -\pi\,\frac{x'^2 + y'^2}{y'}\,dy' \qquad (4)$$

En intégrant cette relation le long d'une ligne de courant, on déterminera l'équation $t' = t'(x',y',\psi')$.

Expression des temps de parcours

L'équation (3) se met sous la forme

$$\psi' = y' + \frac{1}{\pi} \text{Arctg} \frac{y'}{x'}$$

soit

$$x' = y' \text{ cotg } \pi (\psi' - y') \qquad (5)$$

en remplaçant x' par cette valeur dans l'expression (4) on obtient

$$dt' = - \pi y' \left[1 + \text{cotg}^2 \pi (\psi' - y') \right] dy'$$

$$dt' = - \frac{\pi y' \, dy'}{\sin^2 \pi (\psi' - y')}$$

$$t = \int_{y'}^{o} \frac{- \pi \lambda \, d\lambda}{\sin^2 \pi (\psi' - \lambda)}$$

λ étant une variable muette d'intégration

Nous allons calculer cette intégrale par partie, sous forme d'une intégrale indéfinie I

$$I = \int \frac{- \pi \lambda \, d\lambda}{\sin^2 \pi (\psi' - \lambda)}$$

en tenant compte du fait que

$$\int \frac{- \pi \, d \lambda}{\sin^2 \pi (\psi' - \lambda)} = - \text{cotg } \pi (\psi' - \lambda) + \text{constante}$$

$$\int \text{cotg } \pi (\psi' - \lambda) \, d\lambda = - \frac{1}{\pi} \text{Log sin } \pi (\psi - \lambda) + \text{constante}$$

On obtient alors

$$I = - \lambda \text{ cotg } \pi (\psi' - \lambda) - \frac{1}{\pi} \text{Log sin } \pi (\psi' - \lambda)$$

$$t'_r = \left[I \right]_{y'}^{o} = - \left[I \right]_{o}^{y'} = y' \text{ cotg } \pi (\psi' - y') + \frac{1}{\pi} \text{Log} \frac{\sin \pi (\psi' - y')}{\sin \pi \psi'}$$

En utilisant la relation (5) on élimine ψ' :

$$t' = x' + \frac{1}{\pi} \text{Log} \frac{\sin (\text{Arctg} \frac{y'}{x'})}{\sin (\pi y' + \text{Arctg} \frac{y'}{x'})}$$

$$t' = x' - \frac{1}{\pi} \text{Log} \frac{\sin (\pi y' + \text{Arctg} \frac{y'}{x'})}{\sin (\text{Arctg} \frac{y'}{x'})}$$

$$\boxed{t' = x' - \frac{1}{\pi} \text{Log} (\cos \pi y' + \frac{x'}{y'} \sin \pi y')} \qquad (6)$$

Pour chaque valeur de t', la relation (6) donne l'équation d'une isochrone sous forme d'une relation implicite entre x' et y'.

Périmètre d'appel

L'équation (6) peut se mettre sous la forme

$$e^{-\pi x'} (\cos \pi y' + \frac{x'}{y'} \sin \pi y') = e^{-\pi t'} \qquad (7)$$

pour $t' \to \infty$ on obtient l'équation du périmètre d'appel qui est une ligne isochrone particulière :

$$\boxed{x' = - y' \text{ cotg } \pi y'} \qquad (8)$$

ou encore :

$$x' = y' \text{ tg } \pi (y' - \frac{1}{2})$$

Point d'arrêt

Le point d'arrêt étant situé sur l'axe ox par raison de symétrie, a donc pour coordonnées réduites :

$$x' = - \frac{1}{\pi}$$

$$y' = 0$$

2. NAPPE HYDROSTATIQUE

Dans ce cas particulier où la pente i est nulle, le potentiel W_1 est nul, d'où

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi T} \text{Log } z$$

On déduit alors de l'équation (2)

$$\phi = \frac{Q}{4\pi T} \text{Log } (x^2 + y^2)$$

soit

$$\phi = \frac{Q}{2\pi T} \text{Log } r$$

L'expression de la vitesse est :

$$\vec{V} = - \frac{T}{em} \overrightarrow{\text{Grad}} \phi$$

elle est radiale et a pour mesure algébrique :

$$V_r = \frac{dr}{dt} = - \frac{Q}{2 \pi \text{ mer}} \qquad (9)$$

On peut alors en déduire le temps nécessaire au fluide pour arriver au captage en intégrant dt le long d'une ligne de courant, c'est-à-dire le long d'un axe radial

$$t = \int_r^o - \frac{2 \pi e m}{Q} \lambda \, d\lambda$$

$$\boxed{t = \frac{\pi e m}{Q} r^2} \qquad (10)$$

On peut alors définir, par exemple, les notations adimensionnelles suivantes :

$$r' = \frac{r}{e}$$

$$t' = \frac{t}{\frac{me^3}{Q}}$$

La relation (10) s'écrit alors :

$$\boxed{t' = \pi\, r'^2}$$

Notations

e	épaisseur de l'aquifère
i	pente de la nappe
j	nombre imaginaire pur ($j^2 = -1$)
m	porosité cinématique
r	distance au centre du puits
T	transmissivité
V	vitesse moyenne réelle des particules d'eau
W(z)	potentiel complexe $W(z) = \phi(z) + j\,\psi(z)$
x	abscisse
y	ordonnée
z	point du plan complexe $z = x + j\,y$
Z_o, Z_1	constantes complexes d'intégration
ϕ	fonction potentiel
ψ	fonction de courant
symbole '	pour les variables adimensionnelles

Références bibliographiques

J. BEAR et M. JACOBS .- On the movement of water bodies injected into aquifers .- Journal of Hydrology, n° 1-3, pp. 37-57, (1965).

J. BEAR .- Dynamics of fluids in porous media. American Elzevier, pp. 532-533, (1972).